ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА и МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Памятка по ключевым вопросам теории для подготовки к зачету.

1. Правила подсчёта количества отборов:

- **правило суммы**: если из некоторого множества S ***независимые*** выборки A и B можно отобрать $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{m}$ способами соответственно, то объединение $A \cup B$ можно выбрать $n+m$ способами;

- **правило произведения**: если из некоторого множества S множество A можно выбрать $\boldsymbol{n}$ способами, и после каждого такого отбора множество B можно будет выбрать $\boldsymbol{m}$ способами, то пару множеств A и B в указанном порядке можно будет взять $n \cdot m$ способами.

2. Формулы вычисления количества перестановок без повторений и количества сочетаний без повторений.

Количество перестановок n элементов без повторений $P_n = n!$.

Количество сочетаний из n элементов по r без повторений $C_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$.

3. Принцип включения-исключения.

Принцип включения-исключения применяется к задачам разделения дискретного множества на подмножества, в зависимости от наличия или отсутствия у элементов определенных свойств. С помощью принципа включения-исключения решаются следующие задачи:

● **подсчет количества элементов объединения конечных множеств**

$$N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 \cap A_2);$$

$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) - N(A_1 \cap A_2) - N(A_1 \cap A_3) - N(A_2 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_3);$$

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = N(A_1) + N(A_2) + \ldots + N(A_n) - \{N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + \ldots + N(A_{n-1} \cap A_n)\} + \{N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \ldots + N(A_{n-1} \cap A_{n-1} \cap A_n)\} + \ldots + (-1)^{n-1} N(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n);$$

● **подсчет количества элементов, не обладающих ни одним из свойств заданного набора**: пусть имеется множество из N элементов и k свойств $p_1, p_2, \ldots, p_k$, причем каждый элемент может обладать или не обладать любым из этих свойств, тогда количество элементов множества, не обладающих ни одним из k свойств:

$$n(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_k) = N - \sum_{i=1}^{k} n(p_i) + \sum_{1 \le i < j \le k} n(p_i, p_j) - \sum_{1 \le i < j < \ell \le k} n(p_i, p_j, p_\ell) + \ldots + (-1)^k n(p_1, p_2, \ldots, p_k),$$

где $n(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_m})$ − количество элементов, обладающих свойствами $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_m}$ $(1 \le i_1, \ldots, i_m \le k)$.

4. Определение производящей функции для последовательности $\{a_n\}$.

Пусть задана числовая последовательность $\{a_n\}$: $a_0, a_1, \ldots, a_n$. **Производящей функцией** этой последовательности называют формальную сумму степенного ряда

$$f_a(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k,$$

если числовая последовательность бесконечная, то **производящая функция** принимает вид

$$f_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

5. Определение неориентированного графа, порядка графа, ориентированного графа, матрицы инциденций и матрицы смежности, связного графа, дерева, взвешенного графа.

► Пусть S − непустое множество, $V^{(2)}$ − множество всех его двухэлементных подмножеств, $U \subseteq V^{(2)}$. Тогда пара (S,U) называется **неориентированным графом**. Элементы множества S называются вершинами графа, а элементы множества U − ребрами. Обозначение графа $G = (S,U)$.

► Число вершин графа $n = |S|$ называется **порядком графа**. (Напомним, что $|S|$ − мощность множества; для конечного множества его мощность равна числу элементов).

► Дуга – это ребро, на котором определено направление. Если в графе $G = (S,U)$ все элементы множества U − дуги, то граф называется **ориентированным**.

► **Матрица** P **смежности вершин** графа – квадратная матрица $n \times n$ порядка, где n − число вершин, а элементы p_{ij} равны числу ребер (дуг), идущих из i-ой вершины в j-ую. Для неориентированного графа матрица смежности вершин – симметрическая.

Вершины называются **смежными**, если они соединены ребром (дугой).

► **Матрица** R **инциденций** графа – прямоугольная матрица порядков $n \times m$, где n − число вершин, m − число ребер (дуг), а элементы r_{ij} для неориентированного графа

$$r_{ij}=\begin{cases}1,\text{ вершина } x_i \text{ инцидентна ребру } u_j,\\ 0,\text{ вершина } x_i \text{ не инцидентна ребру } u_j,\end{cases}$$

для ориентированного графа

$$r_{ij}=\begin{cases}+1,\text{ дуга } u_j \text{ исходит из вершины } x_i,\\ -1,\text{ дуга } u_j \text{ входит в вершину } x_i,\\ 0,\text{ вершина } x_i \text{ не инцидентна дуге } u_j.\end{cases}$$

Вершина x_i и ребро (дуга) u_j называются **инцидентными**, если вершина x_i является концом ребра (дуги) u_j, и **неинцидентными** в противном случае.

► Граф называется **связным**, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом. Маршрут – чередующаяся последовательность вершин и ребер, начинающаяся и заканчивающаяся вершинами, в которой любая пара соседних элементов инцидентна.

► **Дерево** – связный граф, в котором вершин на одну больше, чем ребер.

► **Взвешенный граф** – граф, каждому ребру (дуге) которого приписано число (вес). Взвешенный граф задается матрицей весов Ω − это матрица смежности вершин, где вместо индикатора наличия ребра (дуги) задан его (ее) вес ω_{ij}; если между вершинами нет дуги, то приписывают ∞ вес. Взвешенный граф обозначают $G=(S,U,\Omega)$.

6. Определение правильной раскраски графа

Пусть имеется некоторое множество цветов. Каждой вершине графа припишем цвет из данного множества. Раскраска графа называется **правильной**, если для любого цвета вершины этого цвета образуют независимое множество, то есть никакие две вершины в одноцветном множестве не смежны.

7. Упорядочивание вершин и дуг ориентированного графа

Граф, не содержащий циклов, можно упорядочить, т.е. распределить вершины (а вместе с ними и дуги) графа на группы по правилам:

- первую группу вершин составляем из тех, в которые не входит ни одна дуга;
- первая группа дуг – исходящие из вершин первой группы;
- дуги первой группы исключаем из графа

и повторяем эти три шага, пока не закончатся вершины.

Затем восстанавливаем граф, «возвращая» на место дуги, начиная с последней группы.

8. Алгоритм Дейкстры.

Алгоритм Дейкстры находит кратчайший путь между двумя данными вершинами графа, если веса дуг неотрицательны. Пусть задан ориентированный граф $G=(S,U,\Omega)$, $\omega_{ij}\ge 0$, начало пути − вершина *s*, конец пути − вершина *t*.

Этап 1. Нахождение длины кратчайшего пути.

Шаг 1. Присвоение вершинам начальных меток.
Полагаем $d(s)=0^*$ и считаем эту метку постоянной. Для остальных вершин $x_i\in S,\ x_i\ne s$ полагаем $d(x_i)=\infty$ и считаем эти метки временными. Обозначим текущую вершину $\tilde{x}=s$.

Шаг 2. Изменение меток.
Для каждой вершины x_i с временной меткой, непосредственно следующей за вершиной $\tilde{x}$, меняем ее метку в соответствии с правилом:
$d_H(x_i)=\min\{d_{CT}(x_i),\,d(\tilde{x})+\omega(\tilde{x},x_i)\}$.

Шаг 3. Превращение метки из временной в постоянную.
Из всех вершин с временными метками $d_H(x_i)$ выбираем вершину с наименьшим значением метки, она считается новой текущей, а сама метка назначается постоянной $\tilde{x}=x_j^*$.

Шаг 4. Проверка на завершение первого этапа.
Если $\tilde{x}=t$, то первый этап завершён и $d(\tilde{x})$ - длина кратчайшего пути от s до t. В противном случае возвращаемся к *Шагу 2*.

Этап 2. Построение кратчайшего пути.

Шаг 5. Последовательный поиск дуг кратчайшего пути.
Среди вершин, непосредственно предшествующих вершине $\tilde{x}$ с постоянными метками, находим вершину x_i, удовлетворяющую соотношению $d(\tilde{x})=d(x_i)+\omega(x_i,\tilde{x})$.
Включаем дугу $(x_i,\tilde{x})$ в искомый путь и полагаем $\tilde{x}=x_i$.

Шаг 6. Проверка на завершение второго этапа.
Если $\tilde{x}=s$, то кратчайший путь найден – его образует последовательность дуг, полученных на пятом шаге и выстроенных в обратном порядке. В противном случае возвращаемся к *Шагу 5*.

9. Алгоритм Форда─ Фалкерсона.

Алгоритм Форда-Фалкерсона находит максимальный поток в сети от источника к стоку и схему распределения величины этого потока по дугам. Заданный ориентированный граф (иначе называемый сетью) $G=(S,U,\Omega)$ должен удовлетворять условиям:

● G − связный граф без петель;

● существует ровно одна вершина, не имеющая предшествующих; эта вершина называется источником и обозначается s;

● существует ровно одна вершина, не имеющая последующих; эта вершина называется стоком и обозначается t;

● каждой дуге $(x_i, x_j) \in U$ поставлено в соответствие неотрицательное число $c(x_i, x_j) \in \Omega$, называемое пропускной способностью дуги (т.е. веса дуг в матрице весов Ω трактуются как пропускная способность, при отсутствии дуги в матрице Ω ставится прочерк).

Этап I. Последовательно перебирают все пути между источником и стоком и максимально нагружают каждый из них. В какой-то момент одна или более дуг пути будет нагружена максимально до уровня пропускной способности (станет насыщенной). Тогда следует перейти к следующему пути. Этап завершен, когда перебраны все пути.

Этап II. Когда пути закончатся, перебирают маршруты между источником и стоком – иногда можно поступиться насыщенностью дуги, чтобы увеличить поток по всей сети. После перебора всех маршрутов суммируют величины потоков по всем построенным путям.

11. Определение бинарного отношения.

Бинарным отношением P на множествах A и B называется любое подмножество декартова произведения $A \times B$:

$$P \subseteq A \times B.$$

Бинарным отношением P на множестве A называется любое подмножество декартова квадрата $A \times A$:

$$P \subseteq A \times A.$$

Напомним, что $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ – множество всех упорядоченных пар.

10. Свойства бинарных отношений: рефлексивность, симметричность, транзитивность, эквивалентность, отношение порядка.

Пусть задано бинарное отношение P на множестве A: $P \subseteq A \times A$.

Отношение P называется

● **рефлексивным**, если $\forall x \in A$, $(x, x) \in P$;

● **симметричным**, если $\forall x, y \in P$ из условия $(x, y) \in P$ следует, что $(y, x) \in P$;

● **транзитивным**, если из $(x, y) \in P$ и $(y, z) \in P$ следует, что $(x, z) \in P$.

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение P называется отношением **эквивалентности** или **эквивалентностью** на множестве A.

Для отношений порядка вводятся следующие понятия. Отношение P называется

● **антисимметритричным**, если $\forall x, y \in P$ из условий $(x, y) \in P$ и $(y, x) \in P$ следует, что $x = y$;

● **асимметричным**, если $\forall x, y \in P$ из условия $(x, y) \in P$ следует, что $(y, x) \notin P$ (поясним, что если $x = y$, то $(x, x) \notin P$).

Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение P называется отношением **частичного порядка**.

Асимметричное и транзитивное отношение P называется отношением **строго порядка**.

12. Определение ДНФ и КНФ.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) формулы алгебры логики называется равносильная ей формула, представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций. (Элементарной конъюнкцией n переменных называется конъюнкция переменных или их отрицаний.)

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) формулы алгебры логики называется равносильная ей формула, представляющая собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций. (Элементарной дизъюнкцией n переменных называется дизъюнкция переменных или их отрицаний.)

13. Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

$$a_n + b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} \ldots + b_{k-1} a_{n-k+1} + b_k a_{n-k} = 0,$$
$$n = k, k+1, \ldots$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_k$ – коэффициенты рекуррентного соотношения (заданные вещественные числа), $b_k \neq 0$

Для нахождения общего решения составляется характеристическое уравнение

$$\lambda^k + b_1 \lambda^{k-1} + b_2 \lambda^{k-2} + \ldots + b_{k-1}\lambda + b_k = 0.$$

Вид общего решения зависит от корней характеристического уравнения.

● $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ – вещественные и различные. Тогда $a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \ldots + C_k\lambda_k^n$, где $C_1, C_2, \ldots, C_k$ – произвольные постоянные.

● корни вещественные, но среди них есть кратные.

Пусть для определенности $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = \tilde{\lambda}$, т.е. $\tilde{\lambda}$ есть корень кратности m, а все остальные $k-m$ корней различные. Тогда $a_n = (C_1 + C_2 n + \cdots + C_m n^m)\tilde{\lambda}^n + C_{m+1}\lambda_{m+1}^n + \cdots + C_k\lambda_k^n$, где $C_1, C_2, \ldots, C_k$ – произвольные постоянные.

● среди корней есть пара комплексно-сопряжённых.

Пусть для определенности $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ а остальные λ_j вещественные и различные. Тогда

$$a_n = (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi) r^n + C_3\lambda_3^n + \cdots + C_k\lambda_k^n$$

где $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, φ — аргумент комплексного числа $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $C_1, C_2, \ldots, C_k$ – произвольные постоянные